CHAPITRE II

Annuités

. Pr BENMOUSSA Abdelali
. S.E.G
. Semestre 2
. Ensemble 8
. Mathématiques Financières

3	**Annuités de capitalisation et de placement.**
4	**Amortissements : emprunts indivis et obligataires.**

3 Annuités de capitalisation Annuités de placement

1 DÉFINITIONS

On appelle annuité une suite de versements effectués à intervalles de temps constants.

Les versements ont pour objet :

— soit de constituer un capital à la fin d'une période déterminée : il s'agit alors, soit **d'annuités de capitalisation** (versements en fin de périodes), soit **d'annuités de placement** (versements au début de chaque période) ;

— soit de rembourser un emprunt : il s'agit alors **d'annuités d'amortissement.**

Les annuités peuvent être soit constantes, soit variables, selon que les versements sont égaux ou inégaux. Si les annuités sont variables, les résultats des chapitres précédents peuvent s'appliquer ; si elles sont fixes, il est possible d'effectuer plus rapidement certains calculs : c'est l'objet du présent chapitre.

La période est souvent l'année (d'où le nom d'annuités), mais parfois le mois ou le trimestre.

2 VALEUR ACQUISE D'UNE SUITE D'ANNUITÉS

A la fin de chaque période, on place une somme de a francs au taux i pour 1 F. Quelle est la valeur acquise A, au bout de la n^e période, c'est-à-dire au moment du dernier versement, par ces versements successifs augmentés de leurs intérêts composés ?

La valeur acquise A est égale à la somme des valeurs acquises, à la fin de la n^e période, par chacun des termes de l'annuité. Celles-ci sont les suivantes :

Annuité	Durée du placement (en périodes)	Valeurs acquises
1	$(n-1)$	$a(1+i)^{n-1}$
2	$(n-2)$	$a(1+i)^{n-2}$
3	$(n-3)$	$a(1+i)^{n-3}$
...	...	...
$(n-1)$	1	$a(1+i)$
	0	a

Leur somme est :

$$A = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \cdots + a(1+i) + a\,.$$

Ces termes constituent une progression géométrique dont, en renversant l'ordre, le premier terme est a, le dernier $a(1+i)^{n-1}$ et la raison $(1+i)$.

La somme des termes (cf 16ᵉ leçon, § 1) est :

$$S = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(1+i)^n - a}{(1+i) - 1}\,.$$

Donc :

$$\boxed{A = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \qquad (1)$$

La table financière III donne, en fonction de i et de n, les valeurs correspondantes de :

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i}\,,$$

c'est-à-dire les valeurs acquises, d'une suite de n annuités de 1 F, au taux i.

La formule trouvée ici est valable pour des annuités de fin de période, c'est-à-dire des annuités de capitalisation. Lorsqu'il s'agit d'annuités de placement, les valeurs acquises de chaque annuité ne sont pas les mêmes à la fin de la dernière période ; le calcul conduit à une formule différente de la formule (1).

Pour éviter les confusions, le plus sûr est, pour chaque problème, d'écrire la valeur actuelle, à la fin de la dernière période, du premier et du dernier versement ; ainsi, on peut être assuré de reconstituer correctement la progression géométrique.

Exemple 1 : *Calculer la valeur acquise d'une suite de 12 annuités de 6 000 F, immédiatement après le versement de la 12ᵉ annuité (taux de l'intérêt 18 %).*

Après le versement de la 12ᵉ annuité, la somme des valeurs acquises de chacune des annuités est :

$$A = 6\,000[(1{,}18)^{11} + \cdots + 1] = 6\,000 \times \frac{(1{,}18)^{12} - 1}{0{,}18}\,.$$

Le coefficient de 6 000 (valeur acquise par une suite d'annuités de 1 F) se lit dans la table financière III (voir abrégé p. 29) ou se calcule à la machine :

$$A = 6\,000 \times 34{,}931\,070 = \mathbf{209\,587\ F.}$$

Exemple 2 : *On place au début de chaque année une somme de 2 000 F. Les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque année : quel sera, au taux annuel 13 %, le capital constitué à la fin de la 20ᵉ année ?*

Il s'agit maintenant d'annuités de placement. A la fin de la 20ᵉ année, la somme des valeurs acquises des annuités est :

$$A = 2\,000\,[(1{,}13^{20} + \cdots + (1{,}13)] = 2\,000 \times 1{,}13 \times \frac{(1{,}13)^{20} - 1}{0{,}13}\,.$$

On lit la somme de la suite géométrique dans la table financière III. Certaines tables donnent directement la valeur du coefficient :

$$(1+i)\,\frac{(1+i)^{20} - 1}{i}\,.$$

$$A = 2\,000 \times (1{,}13) \times (80{,}946\,829) = \mathbf{182\,939{,}83\ F.}$$

On peut juger de l'importance de la capitalisation des intérêts, en comparant ce résultat à la valeur brute des 20 annuités placées sans intérêt :

$$20 \times 2\,000 = 40\,000\ \text{F.}$$

3 CALCULS SUR LES ANNUITÉS

La formule (1) du paragraphe précédent permet, connaissant trois des variables A, a, i et n, de calculer la quatrième. Très souvent, il est utile de connaître le montant de l'annuité nécessaire a pour constituer un capital donné dans un délai donné, le taux de l'intérêt étant imposé. Parfois, le calcul de i et de n doit être effectué. En voici quelques exemples.

① Calcul de l'annuité

Exemple : *On veut constituer un capital de* 50 000 F *à l'aide de* 15 *versements égaux à effectuer en fin d'année. Le taux d'intérêt pratiqué étant de* 4,5 %, *quel sera le montant de chaque versement ?*

Soit a le montant de l'annuité; la valeur acquise par les 15 annuités à la fin de la dernière période sera :

$$A = 50\,000 = a[(1{,}145)^{14} + \cdots + 1]$$
$$= a\frac{(1{,}145)^{15} - 1}{0{,}145}.$$

D'où :

$$a = 50\,000 \times \frac{0{,}145}{(1{,}145)^{15} - 1}.$$

Le coefficient :

$$\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$$

ne se lit pas directement dans les tables financières usuelles. Mais on peut se servir de la table III qui donne son inverse $\dfrac{(1 + i)^n - 1}{i}$:

$$a = 50\,000 \times \frac{1}{45{,}670\,582} = \mathbf{1\,094{,}80\ F}.$$

Si l'on ne dispose pas d'une calculatrice, la division précédente est laborieuse.

Aussi, peut-on utiliser la table V. En effet, calculons la différence entre les expressions :

$\dfrac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$, donnée par cette table et $\dfrac{i}{(1 + i)^n - 1}$ que l'on veut calculer.

En multipliant les deux termes de la première expression par $(1 + i)^n$, on obtient :

$$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}.$$

La différence cherchée est donc :

$$\frac{i[(1 + i)^n - 1]}{(1 + i)^n - 1} = i.$$

Pour $i = 14{,}5$ et $n = 15$, on lit : 0,166 896 dans la table V. D'où le coefficient de 50 000 :

$$0{,}166\,896 - 0{,}145 = 0{,}021\,896$$

et :

$$a = 50\,000 \times 0{,}021\,896 = \mathbf{1\,094{,}80\ F}.$$

② Détermination du nombre d'annuités

Exemple : *Un capital de* 10 000 F *doit être constitué au moyen d'annuités de* 1 250 F, *payables en fin d'année. Quel doit être le nombre d'annuités à verser, le taux annuel d'intérêt étant de* 14 %

De la formule (1), nous tirons :

$$a[(1 + i)^n - 1] = Ai$$
$$a(1 + i)^n - a = Ai$$

d'où :

$$(1 + i)^n = \frac{Ai + a}{a}.$$

L'inconnue n se trouvant en exposant, l'équation ne peut se résoudre qu'à l'aide des logarithmes ou des tables financières.

Avec l'exemple précédent, on peut écrire :

$$1\,250 \times \frac{1{,}14^n - 1}{0{,}14} = 10\,000$$

puis :

$$\frac{1{,}14^n - 1}{0{,}14} = \frac{10\,000}{1\,250} = 8.$$

La table financière III indique qu'à :

6,610 104 correspondent 5 périodes
et à 8,535 519 correspondent 6 périodes.

Or, le nombre d'annuités doit être entier.

Pour obtenir un nombre entier d'annuités, il y a deux solutions :

— choisir pour nombre d'annuités la valeur entière calculée par défaut, et ajouter à la dernière annuité la somme qui n'aura pas encore été capitalisée ;

— choisir l'une quelconque des deux valeurs entières encadrant le résultat exact, et modifier le montant de l'annuité, afin que celle-ci reste constante pour toutes les périodes.

— Ainsi, avec **la première solution,** on prend 6 périodes d'annuités. La valeur acquise des 5 annuités de 1 250 F est, à la fin de la 5^e période :

$$A' = 1\,250[(1{,}14)^4 + \cdots + 1] = 1\,250 \times \frac{(1{,}14)^5 - 1}{0{,}14}$$
$$= 1\,250 \times 6{,}610\,104 = 8\,262{,}63\ \text{F}.$$

Le capital A n'est pas constitué ; il manque 1 737,37 F que l'on ajoute à la 5^e annuité.

— Avec la **deuxième solution,** en choisissant des annuités égales sur 5 années (première option possible) :

$$a = 10\,000 \times \frac{0{,}14}{(1{,}14)^5 - 1} = \frac{10\,000}{6{,}610\,104} = \mathbf{1\,512{,}85\ F}$$

et sur 6 années (deuxième option possible) :

$$a = 10\,000\frac{0{,}14}{(1{,}14)^6 - 1} = \frac{10\,000}{8{,}535\,519} = \mathbf{1\,171{,}57\ F}.$$

Comme il est normal, l'annuité dans la première option est supérieure à 1 250 F ; elle lui est inférieure si l'on choisit un nombre d'annuités égal à 6.

4 VALEUR ACTUELLE D'UNE SUITE D'ANNUITÉS

De même que l'on peut définir la valeur actuelle d'un capital (1re leçon, § 4), on définit la valeur actuelle d'une suite d'annuités comme la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités au début de la première période.

S'il s'agit d'annuités de fins de période, avec les notations déjà utilisées :

Valeur actuelle de la	1e	annuité	:	$a(1 + i)^{-1}$
— —	2e	—	:	$a(1 + i)^{-2}$
....				
— —	ne	—	:	$a(1 + i)^{-n}$.

Si V est la valeur actuelle de la suite des n annuités de a F, on peut écrire :

$$V_0 = a(1 + i)^{-1} + a(1 + i)^{-2} + \cdots + a(1 + i)^{-n}.$$

soit :

$$\boxed{V_0 = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}.$$

Les tables financières qui donnent les valeurs de l'expression :

$$\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

pour les valeurs entières de n et les taux usuels sont intitulées : **« Valeurs actuelles d'un certain nombre d'annuités de 1 F, payables à la fin de chaque période » (table IV).**

On peut vérifier que la valeur actuelle d'une suite d'annuités est égale à la valeur actuelle de sa valeur acquise en fin de période.

Exemple : *Quelle est la valeur actuelle d'une suite de* 12 *annuités de capitalisation (montant :* 5 000 F*), au taux* 14,25 %?

On a :

$$V_0 = 5\,000 \times (1{,}142\,5)^{-1} + \cdots + (1{,}142\,5)^{-12}$$
$$= 5\,000 \times \frac{1 - (1{,}142\,5)^{-12}}{0{,}142\,5}.$$

Si l'on utilise la table financière IV, le taux 14,25 n'y figure pas ; on procède le plus souvent par interpolation linéaire :

Pour 14 %	5,660 292
Pour 14,5 %	5,538 344
Différence pour 0,5	0,121 948
Différence pour 0,25 .... $\frac{0{,}121\,948}{2}$ =	0,060 974

D'où le taux interpolé : 5,538 344 + 0,060 974 = 5,599 318 (la valeur exacte, calculée avec une machine, est 5,598 778)

On trouve :

$$\boxed{V_0 = 27\,996{,}59 \text{ F}}$$

(avec la valeur exacte, on trouve 3 F de moins).

5 ÉVALUATION D'UNE SUITE D'ANNUITÉS A UNE DATE QUELCONQUE

Des suites d'annuités ont déjà été évaluées : au début de la première période (§ 4) et à la fin de la dernière (§ 2) ; il est possible de faire l'évaluation à une date quelconque.

Exemple 1. *Un débiteur devait payer 5 annuités de* 1 000 F, *la première venant à échéance dans* 1 *an ; il obtient de son créancier d'effectuer un versement libératoire unique dans* 8 *ans. Taux* 14 %. *Calculer le montant de ce versement.*

Au moment du dernier versement, la valeur actuelle des 5 annuités aurait été :

$$A = 10\,000[(1{,}14)^4 + \cdots + 1] = 10\,000 \times \frac{(1{,}14)^5 - 1}{0{,}14}$$

soit :

$$A = 10\,000 \times 6{,}610\,104 = 66\,101{,}04 \text{ F}.$$

Trois ans après, A aura pour valeur acquise :

$$66\,101{,}04 \times (1{,}14)^3 = 66\,101{,}04 \times 1{,}481\,544 = 97\,931{,}60 \text{ F}.$$

Le versement libératoire, 8 ans après le début des versements prévus, doit donc être de **97 931,60 F.**

Exemple 2. *Pour régler l'achat d'un fonds de commerce, un débiteur a payé le* 31 *décembre de chaque année depuis* 4 *ans, et doit encore payer le* 31 *décembre des* 5 *années suivantes, une annuité de* 2 000 F. *Sachant qu'il a payé la première annuité un an après avoir acquis le fonds, qu'aurait-il payé s'il avait réglé en une fois son créancier à la date à laquelle il a versé la* 4e *annuité ? Taux* 15 %.

Si l'on se place à la date d'acquisition du fonds, la valeur actuelle des 9 annuités était :

$$V_0 = 2\,000[(1{,}15)^{-1} + \cdots + (1{,}15)^{-9}] = 2\,000 \times \frac{1 - (1{,}15)^{-9}}{0{,}15}$$
$$= 2\,000 \times 4{,}771\,584 = 9\,543{,}17 \text{ F}.$$

La valeur de ce capital à la date à laquelle le débiteur aurait payé la cinquième annuité (au bout de 4 ans) est de :

$$9\,543{,}17 \times (1{,}15)^4 = \mathbf{16\,691{,}06} \text{ F}.$$

Notons que ce résultat est différent de celui d'un autre calcul : le créancier, après avoir versé 4 annuités, désire se libérer par un versement immédiat, unique.

Ce versement aurait pour montant la valeur, à cette date, des 5 annuités restantes, c'est-à-dire :

$$2\,000[(1{,}15)^{-1} + \cdots + (1{,}15)^{-5}] = 2\,000 \times \frac{1 - (1{,}15)^{-5}}{0{,}15}$$
$$= 6\,704{,}31 \text{ F}.$$

4 Amortissements : 1) emprunts indivis et 2) emprunts obligataires

1 DÉFINITION DE L'EMPRUNT INDIVIS. AMORTISSEMENT

Un emprunt indivis est un emprunt effectué auprès d'une seule personne physique ou morale.

Dans l'emprunt indivis, l'emprunteur s'engage généralement :

1° à payer périodiquement l'intérêt du capital emprunté et non encore remboursé ;

2° à rembourser le capital emprunté.

Ce remboursement, appelé **amortissement** du capital emprunté, peut se faire en une ou, généralement, en plusieurs fois.

Le débiteur effectue donc périodiquement un versement ainsi composé :

Versement périodique = Intérêt du capital restant dû + amortissement

Le versement périodique est souvent effectué par annuités constantes ; c'est ce cas qui sera étudié ~~dans~~ la suite de cette leçon. Les autres cas pourront être étudiés à partir des principes énoncés au premier chapitre.

N.B. Il y a lieu de distinguer deux usages du mot amortissement :

— Le premier, *l'amortissement financier,* défini ici : remboursement d'un capital emprunté.

— Le second, *l'amortissement comptable* dont il sera question au § 7 : il s'agit de la somme imputée chaque année dans la comptabilité d'une entreprise à la suite d'un gros investissement.

2 EXEMPLES D'EMPRUNTS INDIVIS

1° Soient V_0 la somme empruntée à la date 0, a l'annuité, i le taux de l'intérêt, n la durée du remboursement ; la valeur actuelle, à la date 0, de la suite d'annuités est :

$$V_0 = a[(1 + i)^{-1} + \cdots + (1 + i)^{-n}]$$

$$\boxed{V_0 = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}} \qquad (1)$$

La **table financière IV** donne sous le titre : « Valeur actuelle d'une suite d'annuités égales à 1 F », les valeurs de $\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$ **pour les valeurs usuelles de i et de n.**

Exemple : *Quelle somme peut-on emprunter sous la garantie d'une suite de 8 annuités de 10 000 F, le taux de l'intérêt étant 9 % ?*

La valeur actuelle de cette suite d'annuités est :

$$V_0 = 10\,000[(1{,}09)^{-1} + \cdots + (1{,}09)^{-8}] = 10\,000 \times \frac{1 - (1{,}09)^{-8}}{0{,}09}.$$

On lit le résultat dans la table financière IV :

$$V_0 = 10\,000 \times 5{,}534\,819 = 55\,348{,}19 \text{ F}.$$

2° De la relation (1), on peut tirer la valeur a de l'annuité d'un emprunt :

$$\boxed{a = V_0 \times \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}}$$

On détermine a à l'aide de la table financière V.

Exemple : *Pierre emprunte une somme de 500 000 F et désire l'amortir en 20 ans ; il se propose de faire des versements semestriels égaux, au taux semestriel de 8 %. Quel doit être le montant de ses versements sachant qu'il opère le premier versement un semestre après l'emprunt ?*

La valeur actuelle des versements est, au moment de l'emprunt, le montant de l'« annuité » étant a :

$$500\,000 = a[(1{,}08)^{-1} + \cdots + (1{,}08)^{-40}] = a \times \frac{1 - (1{,}08)^{-40}}{0{,}08},$$

$$a = 500\,000 \times 0{,}083\,860 = \mathbf{41\,930\ F}.$$

Pierre devra verser 41 930 F chaque semestre pendant 20 ans.

Il est possible également à partir de la formule (1), de calculer le nombre d'annuités ou le taux de l'intérêt.

3 CALCUL DE L'AMORTISSEMENT ET DU TAUX DE L'INTÉRÊT

Chaque annuité versée comprend d'une part les intérêts du capital restant à rembourser, d'autre part l'amortissement.

Pour des annuités constantes, soit une période q de remboursement ; l'annuité a à payer à la fin de cette période comprend d'une part l'intérêt au taux i du capital V_{q-1} restant dû pendant cette période et d'autre part l'amortissement D_q :

$$a = V_{q-1}\, i + D_q.$$

Le capital restant dû est alors : $V_q = V_{q-1} - D_q$.

A la fin de la période $(q+1)$, l'annuité à payer peut s'écrire sous deux formes :

$$a = V_q\, i + D_{q+1} = (V_{q-1} - D_q)\, i + D_{q+1}\,.$$

Donc l'annuité étant la même en q et en $q+1$:

$$(V_{q-1} - D_q)\, i + D_{q+1} = V_{q-1}\, i + D_q\,,$$
$$D_{q+1} = D_q(1+i)\,.$$

Un amortissement de rang quelconque est égal à l'amortissement de rang précédent multiplié par $(1+i)$.

Si les annuités sont constantes, les amortissements successifs forment donc une progression géométrique de raison $(1+i)$.

Application : Cette propriété permet de calculer les amortissements successifs en fonction, par exemple, du premier.

Exemple : *Un emprunt de* 20 000 F *doit être remboursé au moyen de 24 mensualités égales. Calculer le montant de la mensualité et les montants du premier et du dernier amortissement (taux de l'intérêt mensuel,* 1 %*).*

Notons qu'un intérêt mensuel de 1 % correspond à un intérêt annuel de 12,68 % car $(1{,}01)^{12} = 1{,}1268$.

Au moment de l'emprunt, la valeur actuelle de la suite de mensualités a est 1, en supposant que le premier versement a lieu un mois plus tard :

$$V_0 = 20\,000 = a[(1{,}01)^{-1} + \cdots + (1{,}01)^{-24}]$$

d'où :

$$a = 20\,000 \times \frac{0{,}01}{1-(1{,}01)^{-24}} = 20\,000 \times 0{,}047\,073$$
$$= \mathbf{941{,}47\ F}\,.$$

Avec une mensualité de 941,47 F, les intérêts versés le premier mois sont :

$$20\,000 \times 0{,}01 = 200\ \text{F}$$

et l'amortissement :

$$D_1 = 941{,}47 - 200 = \mathbf{741{,}47\ F}\,.$$

Les amortissements sont en progression géométrique de raison 1,01 ; par conséquent le dernier amortissement est :

$$D_{24} = 741{,}47 \ + (1{,}01)^{19} = 741{,}47 \times 1{,}208\,109$$
$$= \mathbf{895{,}78\ F}\,.$$

Le montant des intérêts versés avec la dernière mensualité n'est plus que de 45,69 F.

4 TABLEAUX D'AMORTISSEMENT

Un tableau d'amortissement comporte, pour chaque période :

— le capital restant dû au commencement de la période,

— l'intérêt payable à la fin de la période,

— la partie de l'annuité affectée à l'amortissement financier.

Un tel tableau peut être réalisé avec des annuités constantes ou variables. Le principe des calculs consiste à rechercher le capital restant dû au début de la période, à en déduire l'intérêt payable à la fin de cette période ; en faisant la différence du montant de l'annuité et de celui des intérêts, on calcule l'amortissement.

Exemple : *Un emprunt de* 10 000 F *doit être remboursé en* 3 *ans par des annuités constantes versées en fin d'année. Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt. Taux de l'intérêt :* 12 %.

Le montant de l'annuité constante a est tel que :

$$10\,000 = a[(1{,}12)^{-1} + (1{,}12)^{-2} + (1{,}12)^{-3}]$$

d'où :

$$a = 10\,000 \times \frac{0{,}12}{1-(1{,}12)^{-3}} = 10\,000 \times 0{,}416\,349\,0 = \mathbf{4\,163{,}49}$$

et le tableau d'amortissement :

Années	Capital restant dû au début de l'année	Intérêts payés en fin d'année	Amortissement	Annuité
1	10 000	1 200	2 963,49	4 163,49
2	7 036,51	844,38	3 319,11	4 163,49
3	3 717,40	446,09	3 717,40	4 163,49
		2 490,47	10 000,00	12 490,47

Pour obtenir, par exemple, les nombres de la première ligne, on calcule les intérêts payés en fin d'année :

$$10\,000 \times 0{,}12 = 1\,200$$

puis on les retranche de l'annuité constante, d'où l'amortissement : 2 963,49. Cet amortissement est à retrancher de 10 000 pour obtenir le capital restant dû au début de l'année suivante.

On contrôle le tableau en vérifiant que le capital dû la dernière année est bien amorti par le dernier amortissement (et par conséquent, qu'il a le même montant) et que le total des amortissements est bien égal au capital emprunté.

5 EMPRUNT OBLIGATAIRE : DÉFINITION

Les collectivités publiques (états, communes), les sociétés anonymes, contractent des emprunts auprès du public, en émettant des titres, appelés **obligations,** qui constituent des **parts égales** de l'emprunt.

Chaque obligation est caractérisée, du point de vue mathématique, par sa valeur nominale, le taux de l'intérêt (dit **taux nominal**) servi aux porteurs d'obligations sous forme de coupons, la périodicité du service d'intérêt (en général, l'année), la durée prévue pour le remboursement de l'emprunt et la périodicité de l'amortissement.

Le **remboursement** aux obligataires peut s'effectuer :

— soit *en bloc*, à une date fixée d'avance ;

— soit par *tirages au sort périodiques*, en général annuels. Le sort désigne un certain nombre d'obligations qui sont alors remboursées. Le *plan d'amortissement* figure au dos de l'obligation et indique le nombre de titres à rembourser à chaque tirage ;

— soit *par rachat en Bourse des obligations* dont les propriétaires veulent se défaire et par annulation des titres correspondants. De plus en plus, les collectivités émettrices d'emprunts se réservent cette faculté de rachat.

L'obligation peut être **émise** :

— soit à sa valeur nominale (on dit aussi : au pair) ;

— soit à un prix inférieur à la valeur nominale.

Dans cette leçon, on se limite aux emprunts obligataires les plus usuels, remboursables par annuités constantes et tirages annuels, pour lesquels les coupons d'intérêt et les amortissements sont payés à la même date.

On calcule alors l'annuité théorique et les amortissements comme aux §§ 3 et 4. Une difficulté supplémentaire apparaît, car l'amortissement effectif ne peut être égal à l'amortissement théorique : il faut rembourser un nombre entier d'obligations.

Diverses méthodes sont employées pour calculer le nombre exact d'obligations. On se contentera de la plus simple, qui consiste à arrondir le nombre d'obligations au plus proche, et, si nécessaire, à rembourser, la dernière année, les quelques obligations qui restent encore « vivantes » en raison des arrondis pratiqués antérieurement.

6 EXEMPLE D'EMPRUNTS OBLIGATAIRE ; TABLEAU D'AMORTISSEMENT

Exemple : *Soit un capital de* 100 000 F *à rembourser en* 4 *ans par obligations de* 200 F (*Taux* 12 %).
Dresser le tableau d'amortissement.

On calcule l'annuité théorique :

$$100\,000 = a\,[(1.12)^{-1} + \ldots + (1.12)^{-4}]$$

d'où :

$$a = 100\,000 \times 0.329\,234\,4 = 32\,923{,}44 \text{ F}.$$

Année	Nombre d'obligations vivantes	Somme due	Intérêts dus	Somme à consacrer à l'amortissement	Amortissement effectif	Nombre d'obligations amorties
1	500	100 000	12 000	20 923,44	21 000	105
2	395	79 000	9 480	23 443,44	23 400	117
3	278	55 600	6 672	26 251,44	26 200	131
4	147	29 400	3 528	29 395,44	29 400	147
			31 680		100 000	500

La première ligne de ce tableau est calculée de la façon suivante : on part du nombre d'obligations vivantes ; on en déduit la somme due (multiplication du montant de l'obligation : 200 F par ce nombre) ; les intérêts dus sont alors calculés à 12 %. La somme à consacrer à l'amortissement est l'amortissement théorique : annuité théorique moins intérêt dû.

On arrondit cette somme de façon à avoir un nombre entier d'annuités : d'où l'amortissement effectif, et, en divisant par 200, le nombre d'obligations amorties, 105. Ce nombre est à déduire du nombre d'obligations vivantes au début de l'année, 500, pour obtenir l'année suivante 395 obligations vivantes.

A la dernière ligne, l'amortissement effectif n'est pas un arrondi de la « somme à consacrer à l'amortissement », mais la somme restant due. Dans le cas présent, le résultat est le même, mais il peut arriver que les arrondis effectués précédemment aient abouti à rembourser quelques obligations en trop, ou, au contraire, amènent à rembourser la dernière année quelques obligations qui auraient dû, théoriquement, l'être les années précédentes.

7 APPLICATIONS AUX AMORTISSEMENTS COMPTABLES

1. Il est d'usage, en comptabilité comme en fiscalité, de tenir compte d'une « dotation aux amortissements » déductible des bénéfices de l'entreprise, chaque fois que l'on acquiert un matériel durable. L'amortissement se fait en général par annuités constantes non actualisées

Exemple : *Une machine est achetée* 120 000 F *et sa durée prévue est de* 6 *ans. Quels amortissements pourront être comptés ?*

Usuellement, on compte 6 amortissements égaux de 20 000 F. Les valeurs nettes successives de la machine sont alors de 100 000 F au bout d'un an, 80 000 F au bout de deux ans, etc.

2. Un autre problème consiste à calculer l'annuité qu'il est nécessaire de capitaliser pour être à même de remplacer le matériel lorsqu'il sera hors d'usage.

Exemple : *Une machine dont le prix d'achat est* 120 000 F *pourra être utilisée* 6 *ans ; au bout de ce temps, on prévoit qu'elle aura une valeur nette de* 30 000 F. *Quelle est l'annuité nécessaire pendant les* 6 *années pour que le renouvellement soit possible ?* (*taux d'actualisation* 6 %).

A la date de l'achat, la valeur actuelle du montant de la revente de la machine est :

$$30\,000 \text{ F} \times (1.06)^{-6} = 30\,000 \text{ F} \times 0.704\,96 = 21\,149 \text{ F}.$$

Il y a lieu de reconstituer par les amortissements un capital actualisé de :

$$120\,000 \text{ F} - 21\,149 \text{ F} = 98\,851 \text{ F},$$

au moyen de 6 annuités de fins de période égales à :

$$98\,851 \text{ F} \times \frac{0{,}06}{1-(1{,}06)^{-6}} = 98\,851 \text{ F} \times 0{,}203\,362 = \mathbf{20\,103\,F}.$$